MATIÈRE A OPTION

DURÉE : 3 heures

MATHÉMATIQUES

Le problème a pour objet la détermination de courbes intégrales de l'équation différentielle :

$$\text{(E)} \qquad \frac{dY}{dX} = \frac{2rXY + s(X^2 - Y^2 - 1)}{r(X^2 - Y^2 - 1) - 2sXY}$$

où r et s sont deux constantes réelles liées par la relation $r^2 + s^2 = 1$ et où $\frac{dY}{dX}$ est la dérivée de la fonction $X \to Y$.

Les courbes sont représentées dans le plan affine euclidien P muni d'un repère orthonormé d'origine O, d'axes Ox et Oy.

1° Déterminer les courbes intégrales dans le cas $r = 0$, $s = 1$ (on utilisera le changement de fonction inconnue $h = Y^2$). Déterminer les courbes intégrales dans le cas $r = 1$, $s = 0$ (on cherchera X en fonction de Y).

2° *a.* Soit $B = \{ m(x, y) \mid x \in \mathbf{R} \text{ et } -\pi < y < \pi \}$ la bande du plan P, ensemble des points dont l'ordonnée est strictement comprise entre $-\pi$ et $+\pi$.

On pose $z = x + iy$, et on rappelle que $e^z = e^x (\cos y + i \sin y)$. Montrer que, pour tout m appartenant à B, on a $e^z \neq -1$.

b. Une application $\mathcal{C}$ associe à tout point m de B un point M (X, Y) de P par la loi suivante :

$$X + iY = Z = \frac{e^z - 1}{e^z + 1} \qquad (1)$$

Calculer X et Y en fonction de x et y; on trouvera, par exemple,

$$Y = \frac{2\,e^x \sin y}{e^{2x} + 2e^x \cos y + 1}\,.$$

On désigne par P* le plan P privé des deux demi-droites définies respectivement par ($y = 0$ et $x \leqslant -1$) et ($y = 0$ et $x \geqslant +1$).

Montrer que l'image de B par $\mathcal{C}$ est incluse dans P*.

c. La relation (1) permet de calculer e^z en fonction de Z; en déduire que, pour tout point M de P, il existe un point m et un seul de B tel que $\mathcal{C}(m) = M$. $\mathcal{C}$ est donc une bijection de B sur P*.

3° On suppose que le point $m\,(x, y)$ décrit, dans B, un arc de courbe admettant une représentation paramétrique $t \to (x(t), y(t))$, où x et y sont des fonctions continûment dérivables et telles que l'on a, pour tout t, $(x'(t))^2 + (y'(t))^2 \neq 0$.

a. Montrer qu'alors le point M décrit, dans P*, un arc de courbe admettant une représentation paramétrique $t \to (X(t), Y(t))$, où les fonctions X et Y sont continûment dérivables. Calculer les dérivées $X'(t)$ et $Y'(t)$ en fonction de $x(t)$, $y(t)$, $x'(t)$, $y'(t)$.

b. Montrer que $X'(t)$ et $Y'(t)$ ne s'annulent jamais simultanément.

c. On considère les trois vecteurs donnés par leurs coordonnées :

$$\vec{u} \begin{vmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{vmatrix} \qquad \vec{U} \begin{vmatrix} X'(t) \\ Y'(t) \end{vmatrix} \qquad \text{et} \qquad \vec{W} \begin{vmatrix} p = (e^{2x(t)} + 1)\cos y(t) + 2e^{x(t)} \\ q = (1 - e^{2x(t)})\sin y(t) \end{vmatrix}$$

Vérifier que le vecteur $\vec{W}$ n'est jamais nul et trouver une relation simple (2) entre les trois angles : $(Ox, \vec{u})$, $(Ox, \vec{U})$ et $(Ox, \vec{W})$.

(On pourra chercher à exprimer les coordonnées de $\vec{U}$ en fonction de celles de $\vec{u}$ et de $\vec{W}$.)

4° On désigne par A et A' les points de P de coordonnées respectives $(-1, 0)$ et $(1, 0)$. M(X, Y) est toujours le transformé de $m\,(x, y)$ par $\mathcal{C}$.

a. Montrer que $y - \pi$ est une mesure de l'angle $(\overrightarrow{MA'}, \overrightarrow{MA})$; on pourra admettre qu'il en résulte que l'image, par $\mathcal{C}$, d'une droite parallèle à Ox et incluse dans B est un arc de cercle d'extrémités A et A' (ou le segment AA').

b. M étant un point de P*, il existe une ligne unique, C_M contenant les trois points A, A', M et qui est un cercle ou une droite. On appelle Λ toute courbe incluse dans P*, admettant en chacun de ses points M, une tangente MT qui se déduit par une rotation d'angle constant (noté α), de la tangente Mθ en M à C_M. Que peut-on en déduire, d'après le 3° *c*, pour la transformée par $\mathcal{C}$ d'un segment inclus dans B?

c. Donner une représentation paramétrique d'une courbe Λ qui contient les deux points de coordonnées

$$(0, 0) \quad \text{et} \quad \left(\frac{e^2 - 1}{e^2 + 1}\,,\ \frac{2e}{e^2 + 1}\right).$$

5° Calculer la pente de la tangente Mθ, en M à C_M, en fonction des coordonnées X et Y de M.

Calculer la pente de la droite MT définie par (Mθ, MT) $= \alpha$.

Montrer que les courbes Λ associées à l'angle α sont des courbes intégrales de E pour $r = \cos\alpha$, $s = \sin\alpha$.

Définir (par des représentations paramétriques) une infinité de courbes intégrales de E dans le cas $r = s$.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail